



TITLE:

$\mathbb{P}^1$ 上のクンマー分岐  
被覆の自己同型群(Analytic  
Varieties および Stratified spaces に  
おける諸問題)

AUTHOR(S):

桜井, 幸一

---

CITATION:

桜井, 幸一.  $\mathbb{P}^1$ 上のクンマー分岐被覆の自己同型群(Analytic Varieties および Stratified spaces における諸問題). 数理解析研究所講究録 1987, 634: 255-259

ISSUE DATE:

1987-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100079>

RIGHT:

## $P^1$ 上のクンマー分岐被覆の自己同型群

九州大 エ 桜井幸一 (Kouichi Sakurai)

$P^1$ 上の超楕円型リーマン面のように、その moduli が、 $P^1$ 上の分岐跡によって決定されるものがある。この方面では、難波[4], 加藤崇雄[3]らの代数関数  $y^n = f(x)$ , ( $f(x)$ : 有理関数) によって定義される  $P^1$ 上の巡回被覆の研究があり、また最近加藤十吉[2]は、Hirzebruch[1]の  $P^2$  (or  $P^1$ ) 上のクンマー分岐被覆の同変同型問題を調べている。彼らは、被覆の枚数と分岐跡の数に対して条件をつけて、定理を証明している。

この報告では、 $P^1$ 上の分岐跡が一般の場合のアーベル被覆 (巡回とクンマー) の同変同型問題を考える。詳しくは[5]を参照

$B = \{b_1, \dots, b_r\}$  を  $P^1$ 上の相異なる  $r$  個の点集合とする。以下整数  $m$  に対し、 $mB$  で  $m \sum_{i=1}^r b_i$  なる  $P^1$ 上の因子を表す。  $R$  をリーマン面とし、 $\text{Aut}(R)$  で  $R$  の解析的自己同型群を表す。  $T$  を  $\text{Aut}(R)$  の部分群とする。このとき、 $(T, R)$  が  $P^1$ 上分岐因子

$mB$  をもつ巡回被覆であるとは、 $T$  が  $m$  次巡回群であり、かつ  $R/T$  が軌道体として  $(\mathcal{P}', mB)$  に同型であると定義し、

$(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$  と書く。以下では  $B \subset \mathcal{P}'$  が  $\#B \geq 4$  かつ

$\text{Aut}(\mathcal{P}', B) = \text{id}$ . をみたす時, *asymmetric*,  $\#B \leq 3$  の時, *elementary* と呼ぶ。 ( $\text{Aut}(\mathcal{P}', B) = \{\phi \in \text{Aut}(\mathcal{P}') ; \phi(B) = B\}$ )

定理1  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ ,  $B' = \{b'_1, \dots, b'_r\}$  に対し  $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$

$(T', R') \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB')$  とする。 (仮定)  $r \geq 4$ ,  $m \geq 3$  かつ

$B$ : *asymmetric* (結論) 同型  $f: R \rightarrow R'$  が存在すれば,  $f$  は同変同型 (i.e.  $f^* T' f = T$ ) であり, 同型  $\bar{f}: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$  かつ  $\bar{f}(B) = B'$  を引きおこす。

定理1'  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ ,  $(T, R) \in \mathcal{C}(\mathcal{P}', mB)$  は定理1と同じとする。このとき  $\text{Aut}(R) = T (\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$B = \{b_1, \dots, b_r\}$  を  $\mathcal{P}'$  上の相異なる  $r$  個の点とする。そして、 $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}'$  を  $\pi_1(\mathcal{P}', *) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  なる  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Hurwitz 準同型  $\beta \circ \alpha$  の核に対応するガロア分岐被覆とする。 ( $\mathcal{P}' = \mathcal{P}' \setminus B$ ,  $* \in \mathcal{P}'$ )  $X$  は自己同型群として被覆変換群  $T (\cong H_1(\mathcal{P}', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1})$  をもつリーマン面であり、軌道体として  $X/T \cong (\mathcal{P}', mB)$ 。このとき  $(T, X)$  を分岐因子  $mB$  をもつリーマン分岐被覆と呼び、  $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$  と書く。

定理 2  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ ,  $B' = \{b'_1, \dots, b'_r\}$  に対し  $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$ ,  $(T', X') = K(\mathcal{P}', mB')$  とする。(仮定)  $r \geq 3$ ,  $n \geq 4$  かつ  $B$  の任意の部分集合は *asymmetric or elementary* (結論) 同型  $f: X \rightarrow X'$  が存在すれば, これは同変同型, しかも, 同型  $f: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$  かつ  $f(B) = B'$  を引き起こす。

定理 2'  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ ,  $(T, X) = K(\mathcal{P}', mB)$  は定理 2 と同じとする。このとき  $T$  は  $\text{Aut}(X)$  の正規部分群であり,

$$\text{Aut}(X)/T \cong \text{Aut}(\mathcal{P}', B) \cong \begin{cases} S_3 & (r=3) \\ \text{id.} & (r \geq 4) \end{cases}$$

$L = \sum_{i=1}^r l_i$  を  $\mathcal{P}^2$  上の相異なる  $r (\geq 2)$  本の line から成る因子とする。 $L$  の特異点  $p$  に対して,  $\gamma_p: \hat{\mathcal{P}}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$  を  $p$  での  $\mathcal{P}^2$  の blowing up とする。  $D_i = \overline{\gamma_p^{-1}(l_i \cap p)}$ ,  $E_p = \gamma_p^{-1}(p)$ ,  $d_i = E_p \cap D_i$ ,  $D_p = \{d_1, \dots, d_m\}$  ( $m$  は  $p$  での  $L$  の重複度) とおく。もし,  $L$  が, 重複度 4 以上のすべての特異点  $p$  に対して,  $D_p$  の任意の部分集合が *asymmetric or elementary* であるとき,  $L$  を *locally asymmetric* と呼ぶ。

$L = \sum_{i=1}^r l_i$  は上述の因子とする。整数  $M \geq 2$  に対し,

$$\beta \circ \alpha: \pi_1(\mathcal{P}_0^2, *) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{P}_0^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(\mathcal{P}_0^2; \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$$

( $\mathcal{P}_0^2 = \mathcal{P}^2 \setminus L$ ,  $*$  ( $\mathcal{P}_0^2$ ) を考え, 一次元の場合と同様にして,  $\mathcal{P}^2$  上分岐因子  $mL$  を持つ  $r$ -マ一分岐被覆  $(T, X) = K(\mathcal{P}^2, L)$  が定義される。加藤十吉 [2] の定理と同様にして

定理2を応用すると次の結果が得られる。

定理3  $L = \sum_{i=1}^r l_i$ ,  $L' = \sum_{j=1}^{r'} l'_j$  に対し  $(T, X) = K(\mathbb{P}^2, mL)$   
 $(T', X') = K(\mathbb{P}^2, mL')$  とする。(仮定)  $r \geq 4$ ,  $m \geq 6$ , 各  $l_i$   
 $(i=1, \dots, r)$  上少なくとも3点  $L$  の特異点が存在し,かつ  $L$  は  
*locally asymmetric* (結論) 同型  $f: X \rightarrow X'$  が存在すれば,  
 $f$  は同変同型であり, 同型  $\bar{f}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  s.t.  $\bar{f}(L) = L'$  を引きおこす。

定理3'  $(T, X) = K(\mathbb{P}^2, mL)$  は定理3と同じとする。このとき  $T$  は  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  の正規部分群であり,

$$\text{Aut}(X)/T \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^2, L)$$

我々は最近, 定理2が  $r \geq 4$  か  $m \geq 11$  の仮定の下で成立することを証明した。したがって定理3は  $m \geq 11$  ならば  $L$  が *locally asymmetric* でなくても成立する。加藤十吉は[6]においてこの条件を  $m \geq 6$  とできるかと述べている。

### 参考文献

[1] Hirzebruch, F.: Arrangements of lines and Algebraic surfaces. Arithmetic and Geometry, Vol. II, Progress in Math. 36, 113-140 (1983), Birkhauser.

- [2] Kato, M. : On biholomorphisms between some Kummer branched covering space of complex projective plane. preprint
- [3] Kato, T. : Conformal equivalence of compact Riemann surfaces. Japan J. Math. 7, 281-289 (1981).
- [4] Namba, M. : Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces. Tsukuba J. Math. 5, 319-338 (1981).
- [5] Sakurai, K. and Suzuki, M. : Equivalence problem and automorphisms of some abelian branched coverings of the Riemann sphere, preprint.
- [6] Kato, M. : 複素射影平面に沿った Kummer 分岐被覆. トポロジーと代幾何学 1985.